Problema 4. Este cunoscut faptul că o ecuaţie de gradul al doilea nu poate avea mai mult de două soluţii reale. Există $p, q \in \mathbb{R}$, cu $p \neq 0$, astfel încât ecuaţia $\lfloor x^2 \rfloor + px + q = 0$ să aibă mai mult de 100 de soluţii reale?

***

Soluţie. Fie $x^2 = n + y$ cu $n \in \mathbb{N}$ şi $y \in [0, 1)$ Ecuaţia dată devine $n \pm p\sqrt{n+y} + q = 0$ sau $p^2(n + y) = (q + n)^2$ cu o rădăcină pentru (n, y) (alegem acelaşi semn pentru x şi $-\dfrac{q+n}{p}$.

Avem $n + 1 > \dfrac{(q+n)^2}{p^2} \geq n$ de unde obţinem $n^2 + n(2q - p^2) + q^2 \geq 0$ şi $n^2 + n(2q - p^2) + q^2 - p^2 < 0$.

Dacă alegem $p^2 = 4q$, vom obţine $(n - q)^2 < 4q$, ceea ce conduce la $\sim 4\sqrt{q}$ situaţii. Dacă alegem $q = 900$, $p = 60$ şi orice $n \in (840, 960)$, atunci vom avea 119 soluţii pentru ecuaţia $\lfloor x^2 \rfloor + 60x + 900 = 0$, anume $x_n = -\frac{n+900}{60}, \forall n \in \{841, 842, ..., 958, 959\}$.