2. Fie x, y și z numere reale strict pozitive. Demonstrați că are loc inegalitatea:

$$\frac{x^5+4x^2+3x+8}{(y+1)^2}+\frac{y^5+4y^2+3y+8}{(z+1)^2}+\frac{z^5+4z^2+3z+8}{(x+1)^2}\geq 12.$$

(Petru Braica)

***Soluție*.**

Din inegalitatea mediilor pentru opt numere pozitive:

$$x^5+3x+4=\ x^5+x+x+x+1+1+1+1$$
$$\geq 8\sqrt[8]{x^5\cdot x\cdot x\cdot x\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1}=8x.$$

Acestei inegalități îi adunăm $4x^2+4$ în ambii membri și obținem că :

$$x^5+4x^2+3x+8\geq 4x^2+8x+4=4\,(x+2)^2>0,$$

Pentru orice număr real stict pozitiv x, de unde:

$$\frac{x^5+4x^2+3x+8}{(x+2)^2}\geq 4,\ (*)$$

pentru orice x număr real strict pozitiv.

Acum vom aplica inegalitatea mediilor pentru cele trei fracții din membrul stâng al inegalității și vom obține:

$$\frac{x^5+4x^2+3x+8}{(y+1)^2}+\frac{y^5+4y^2+3y+8}{(z+1)^2}+\frac{z^5+4z^2+3z+8}{(x+1)^2}\geq$$

$$3\sqrt[3]{\frac{x^5+4x^2+3x+8}{(y+2)^2}\cdot\frac{y^5+4y^2+3y+8}{(z+2)^2}\cdot\frac{z^5+4z^2+3z+8}{(x+2)^2}}=$$

$$3\sqrt[3]{\frac{x^5+4x^2+3x+8}{(x+2)^2}\cdot\frac{y^5+4y^2+3y+8}{(y+2)^2}\cdot\frac{z^5+4z^2+3z+8}{(z+2)^2}}\geq$$

$$3\cdot\sqrt[3]{4\cdot 4\cdot 4}=3\cdot 4=12,$$

Ultima minorare rezultă din relația (*).

Cu egalitate pentru x = y = z = 1 .