SOLUŢIE

Enunţ: *Fie* $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ *o funcţie care satisface relaţia*

$$f(x)+f(y)+2xy=f(x+y),$$

pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}$. *Dacă* $f(1)=2$ *calculaţi* $f(2022)$.

Soluţie. Ipoteza este echivalentă cu $f(x)-x^2+f(y)-y^2=f(x+y)-(x+y)^2$, deci funcţia g definită prin $g(x)=f(x)-x^2$ verifică relaţia $g(x)+g(y)=g(x+y)$. Suplimentar obţinem $g(1)-1$. Obţinem $g(x)=x$,pentru orice $x\in\mathbb{Z}$ şi apoi $f(x)=x^2+x$. Atunci $f(2022)=2022\cdot 2023$. $\square$