Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi numerele reale distincte $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$. Determinaţi numărul funcţiilor $f : \{a_1, a_2, \ldots, a_{2n}\} \to \{0, 1\}$ care verifică inegalitatea: $\sum\limits_{k=1}^{n} f(a_k) \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{2n} f(a_k)$.

Sorin Dumitrică, problema O:890, Gazeta Matematică 11 / 1998

Soluţie. Notăm $L_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(a_k)$ şi $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} f(a_k)$.

Există o singură posibilitate ca $L_n = n = R_n$, şi anume atunci când $f(a_1) = f(a_2) = \ldots = f(a_{2n}) = 1$. Scriem: $1 = \left(C_n^0\right)^2$.
Există C_n^1 funcţii cu $L_n = n - 1$. În acest caz, $R_n \geqslant n - 1$. Deoarece există C_n^1 funcţii cu $R_n = n - 1$ şi o singură funcţie cu $R_n = n$, deducem că există $C_n^1 \left(1 + C_n^1\right)$ funcţii cu $L_n = n - 1 \leqslant R_n$.
Avem C_n^2 funcţii cu $L_n = n - 2$. În acest caz, $R_n \geqslant n - 2$. Deoarece există C_n^2 funcţii cu $R_n = n - 2$, C_n^1 funcţii cu $R_n = n - 1$ şi o singură funcţie cu $R_n = n$, rezultă că există $C_n^1 \left(1 + C_n^1 + C_n^2\right)$ funcţii cu $L_n = n - 2 \leqslant R_n$.

Continuând raţionamentul, deducem că pentru orice $k = \overline{0, n}$, există $C_n^k \left(1 + C_n^1 + \ldots + C_n^k\right)$ funcţii cu cu $L_n = n - k \leqslant R_n$.

Numărul tuturor funcţiilor cu proprietatea din enunţ este:

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k\right). \tag{1}$$

Desfăcând suma din (1) şi grupând din nou termenii acesteia, obţinem:

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(C_n^n + C_n^{n-1} + \ldots + C_n^k\right) \tag{2}$$

Adunând (1) şi (2), obţinem:

$$2x_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\left(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n\right) + C_n^k\right) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(2^n + C_n^k\right).$$

Aşadar $2x_n = 2^n \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k + \sum\limits_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = 2^{2n} + C_{2n}^n = 2^{2n} + 2C_{2n-1}^{n-1}$.

În consecinţă, $x_n = 2^{2n-1} + C_{2n-1}^{n-1}$.