

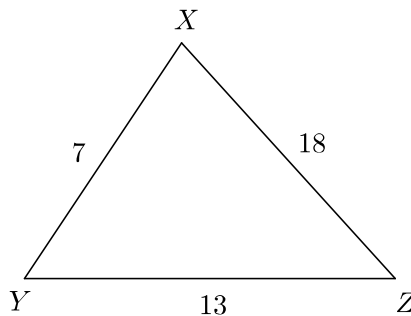
Cele șase muchii ale unui tetraedru  $ABCD$  au lungimile 7, 13, 18, 27, 36 și 41. Dacă  $AB = 41$ , cât este  $CD$ ?

*Concurs AHSME, SUA, 1988*

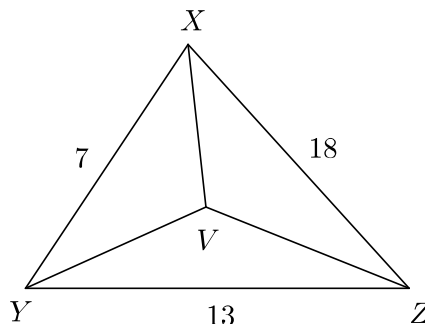
**Soluția 1.**

Vom folosi faptul că într-un triunghi suma lungimilor oricăror două laturi este mai mare decât lungimea celei de-a treia.

Deoarece  $7 + 13 \leq 27$  și  $7 + 18 \leq 27$ , muchiile de lungime 7, 13 și 18 trebuie să formeze un triunghi,  $XYZ$ , cu  $XY = 7$ ,  $YZ = 13$ ,  $ZX = 18$ . Într-adevăr, dacă una din muchiile de lungime 13 sau 18 ar fi muchia opusă celei de lungime 7, cealaltă va fi o muchie alăturată muchiei de lungime 7 și nu va exista nicio muchie care să închidă triunghiul. Prin urmare muchia de lungime 13 trebuie să fie adiacentă celei de lungime 7 și singura muchie care poate închide triunghiul este cea de lungime 18.



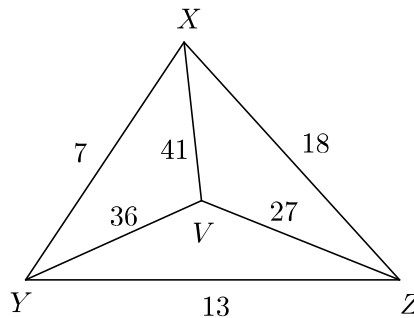
Atunci muchiile de lungimi 27, 36 și 41 au un vârf comun,  $V$ . Deoarece numai 41 și 36 au diferența mai mică decât 7, deducem că  $VX$  și  $VY$  sunt 36 și 41. Rezultă  $VZ = 27$ . O reprezentare schematică a configurației poate fi văzută în figura de mai jos.



Dacă  $VX = 36$ ,  $VY = 41$  atunci în triunghiul  $VYZ$  am avea  $YZ + VZ = 13 + 27 = 40 < 41 = VY$ , contradicție.

Singura posibilitate este  $VX = 41$ ,  $VY = 36$ . Se verifică ușor că această configurație este într-adevăr posibilă. Prin urmare, muchia opusă muchiei  $XV = AB = 41$  este muchia  $CD = YZ = 13$ .

Singura configurație posibilă este așadar:



**Soluția 2.** Distingem două cazuri:

Cazul I: muchiile de lungimi 41 și 7 sunt opuse.

În acest caz muchiile de lungimi 7 și 36 sunt alăturate, iar cea de-a treia muchie a triunghiului determinat de ele trebuie să aibă lungimea mai mare decât  $36 - 7 = 29$ , ceea ce nu se poate deoarece am presupus că muchia de lungime 41, singura care are lungimea convenabilă, nu este adiacentă muchiei de lungime 7. Prin urmare acest caz nu este posibil.

Cazul II: muchiile de lungimi 41 și 7 sunt adiacente.

Cea de-a treia muchie a triunghiului care are muchiile 41 și 7 trebuie să aibă lungimea mai mare ca  $41 - 7 = 34$ , deci trebuie să fie 36. Au rămas „nefolosite” muchiile de lungimi 13, 18 și 27. Două dintre aceste muchii determină cu muchia de lungime 41 un triunghi, deci suma lungimilor lor este mai mare ca 41. Deducem că cele două muchii au lungimile 18 și 27, prin urmare muchia opusă lui  $AB = 41$  este  $CD = 13$ . Configurația este într-adevăr posibilă după cum o arată figura a treia din cadrul soluției 1.