Problema 2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$$\sin\frac{\pi x}{12}=\frac{\sqrt{x-1}}{2}.$$

Cristian Heuberger

Soluţie. Este evident că $x \geqslant 1$, iar pentru $x \geqslant 5$ ecuaţia nu are soluţii. Deoarece $x\in[1,5)$, rezultă că $\frac{\pi x}{12}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Ecuaţia este echivalentă cu: $\left(\sin\frac{\pi x}{12}\right)^2=\frac{x-1}{4}$.

Obţinem: $\frac{1-\cos\frac{\pi x}{6}}{2}=\frac{x-1}{4} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi x}{6}=\frac{3-x}{2}$. $\qquad (*)$

Funcţia $f:[1,5)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos\frac{\pi x}{6}$ este concavă pe $[1,3]$ şi convexă pe $[3,5)$. Membrul drept al ecuaţiei $(*)$ fiind o expresie de gradul I, rezultă că pe fiecare dintre intervalele amintite ecuaţia are cel mult două soluţii. Pe primul interval soluţiile sunt $x=2$ şi $x=3$, iar pe al doilea interval soluţiile sunt $x=3$ şi $x=4$. Aşadar, mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $S=\{2,3,4\}$.