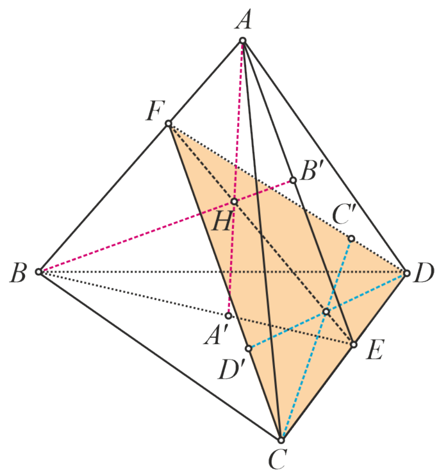
Problema 3. Se consideră punctele necoplanare A, B, C, D şi dreptele AA', BB', CC', DD' perpendiculare pe planele (BCD), (ACD), (ABD), respectiv (ABC).

a) Dacă dreptele AA' şi BB' sunt concurente, demonstraţi că dreptele CC' şi DD' sunt coplanare.

b) Dacă dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente, demonstraţi că dreptele AA', BB', CC' şi DD' sunt concurente.

***



Soluţie. a) Pentru simplitatea notaţiei, putem considera că $A' \in (BCD)$, $B' \in (ACD)$, $C' \in (ABD)$ şi $D' \in (ABC)$.

Fie $\alpha = (AA', BB')$ şi punctele H, E, astfel încât $\{H\} = AA' \cap BB'$, $\{E\} = \alpha \cap CD$.

Deoarece $A, B', E \in \alpha \cap (ACD)$, rezultă că A, B', E sunt coliniare. Analog deducem că B, A', E sunt coliniare.

$AA' \perp (BCD)$, iar $CD \subset (ABD)$, deci $AA' \perp CD$.

$BB' \perp (ACD)$, iar $CD \subset (ACD)$, deci $BB' \perp CD$. Aşadar $CD \perp \alpha$ şi cum $AB \subset \alpha$, rezultă că $AB \perp CD$.
Din $CC' \perp (ABD)$ şi $AB \subset (ABD)$, rezultă că $CC' \perp AB$. Dreptele CD şi CC' sunt concurente, deci $AB \perp (CD, CC')$. (1)

Din $DD' \perp (ABC)$ şi $AB \subset (ABC)$, rezultă că $DD' \perp AB$. Dreptele CD şi DD' sunt concurente, deci $AB \perp (CD, DD')$. (2)

Din (1) şi (2) deducem că $(CD, CC') = (CD, DD') \overset{\text{not.}}{=} \beta$, deci dreptele CC' şi DD' sunt coplanare, iar planul β, care le conţine, este planul care trece prin CD şi este perpendicular pe AB.

b) Cu notaţiile precedente, dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente în H. Fie $\{F\} = HE \cap AB$. Din $AA' \perp (BCD)$ şi $BE \subset (BCD)$, rezultă că $AA' \perp BE$. Analog deducem că $BB' \perp AE$, aşadar AA' şi BB' sunt înălţimi în triunghiul ABE, deci EF este cea de-a treia înălţime, adică $EF \perp AB$. Cum $AB \perp CD$, rezultă că $AB \perp (CD, EF)$. Din (1) rezultă că $EF \subset \beta$, deci $\{F\} = \beta \cap AB$. Ca la a) se arată că punctele F, D', C sunt coliniare, la fel şi punctele F, C', D. Ca mai înainte, rezultă că CC' şi DD' sunt înălţimi în triunghiul CDF. Dar $CD \perp (AB)$ şi $CD \perp AA'$, deci $CD \perp (ABE)$, iar $EF \in (ABE)$, în consecinţă $CD \perp EF$. Aşadar EF este cea de-a treia înălţime a triunghiului CDF, şi cum $\{H\} = EF \cap CC'$, rezultă că $H \in DD'$, adică dreptele AA', BB', CC' şi DD' sunt concurente.