SOLUȚIE

Problema 3
Să se determine numerele reale a și b știind că $a+b \in \mathbb{Z}$ și $a^2+b^2=2$.

Romeo Ilie, Olimpiada Națională de Matematică 2001

Soluție.

Fie $t \in \mathbb{Z}$, $t = a+b$.
Deoarece $t^2 \leq 2 \cdot (a^2+b^2) = 4$ rezultă că $|t| \leq 2 \Leftrightarrow t \in \{-2,-1,0,1,2\}$.
Din faptul că $ab = \dfrac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2} = \dfrac{t^2-2}{2}$, rezultă că a și b sunt soluțiile ecuației $x^2 - tx + \dfrac{t^2-2}{2} = 0$, $t \in \{-2,-1,0,1,2\}$. Rezolvând cele cinci ecuații corespunzătoare valorilor lui t deducem imediat că:

$$(a,b) \in \left\{(-1,-1),(1,1),(1,-1),(-1,1),\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right),\right.$$
$$\left.\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\right\}.$$