SOLUȚIE

**3.** Pe laturile $AB$ şi $CD$ ale unui dreptunghi $ABCD$ cu $AB > BC$ se iau respectiv punctele $M$ şi $N$ astfel încât $\sphericalangle BCM = 30^\circ$, iar $N$ este simetricul punctului $M$ faţă de punctul $O$ de intersecţie a diagonalelor dreptunghiului. Demonstraţi că triunghiul $CNM$ este echilateral dacă şi numai dacă dreapta $OB$ este perpendiculară pe dreapta $CM$.

**Soluţie**. Considerăm pentru început triunghiul $CNM$ echilateral. Cum $CO$ este mediană în triunghiul $CNM$ echilateral, deducem că este şi bisectoare, deci $\sphericalangle MOC = 30^\circ = \sphericalangle BCM$. Astfel triunghiul $BCO$, având $\sphericalangle BCO = 60^\circ$ şi $OB = OC$, este echilateral, iar $CM$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BCO$, aşadar perpendiculară pe dreapta $OB$.

Reciproc, considerând că dreapta $OB$ este perpendiculară pe dreapta $CM$, oservăm că $\sphericalangle CBO = 60^\circ$ şi $OB = OC$, deci triunghiul $BCO$ este echilateral. Deducem astfel că dreapta $CM$ este mediatoarea segmentului $OB$ şi astfel $MB = MO$, deci $2 \cdot MB = 2 \cdot MO$. Folosind teorema unghiului de $30^\circ$ în triunghiul $CMB$ dreptunghic în $B$ deducem că $CM = 2 \cdot MB$, prin urmare $CM = MN$ şi, cum $\sphericalangle MCN = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, obţinem că triunghiul $CNM$ este echilateral.