Problema 4
Etapa 5
Clasa a VI-a

Problema 4. Arătați că din oricare 5 numere naturale putem alege 3 numere cu suma divizibilă cu 3.

* * *

Soluţie: Dacă există trei numere care dau același rest la împărțirea cu 3, atunci problema este rezolvată.

Dacă toate dau restul 0 avem $n_1 = 3 \times c_1$, $n_2 = 3 \times c_2$ și $n_3 = 3 \times c_3$. Atunci $n_1 + n_2 + n_3 = 3 \times c_1 + 3 \times c_2 + 3 \times c_3 = 3 \times (c_1 + c_2 + c_3)$ care se divide cu 3.

Dacă toate dau restul 1 avem $n_1 = 3 \times c_1 + 1$, $n_2 = 3 \times c_2 + 1$ și $n_3 = 3 \times c_3 + 1$. Atunci $n_1 + n_2 + n_3 = 3 \times c_1 + 1 + 3 \times c_2 + 1 + 3 \times c_3 + 1 = 3 \times (c_1 + c_2 + c_3) + 3$ care se divide cu 3.

Dacă toate dau restul 2 avem $n_1 = 3 \times c_1 + 2$, $n_2 = 3 \times c_2 + 2$ și $n_3 = 3 \times c_3 + 2$. Atunci $n_1 + n_2 + n_3 = 3 \times c_1 + 2 + 3 \times c_2 + 2 + 3 \times c_3 + 2 = 3 \times (c_1 + c_2 + c_3) + 6$ care se divide cu 3.

Dacă nu avem trei numere care dau toate același rest la împărțirea cu 3, atunci vom avea cel puțin un număr cu restul 0, $n_1 = 3 \times c_1$, cel puțin un număr cu restul 1, $n_2 = 3 \times c_2 + 1$ și cel puțin un număr cu restul 2, $n_3 = 3 \times c_3 + 2$.

În aceste condiții $n_1 + n_2 + n_3 = 3 \times c_1 + 3 \times c_2 + 1 + 3 \times c_3 + 2 = 3 \times (c_1 + c_2 + c_3) + 3$ care se divide cu 3.