Problema 2. Pe un cerc sunt 1000 de numere reale nenule, vopsite alternativ în alb şi negru. Fiecare număr negru este egal cu suma celor două numere albe vecine lui, iar fiecare număr alb este egal cu produsul celor două numere vecine lui. Aflaţi suma celor 1000 de numere.

International Mathematics Tournament of Towns, Spring 2013

Soluţie. Numerotăm locurile numerelor de pe cerc, de la 1 la 1000 şi considerăm că numerele de pe locurile impare sunt negre, iar cele de pe locurile pare sunt albe. Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$, astfel încât numărul negru de pe locul 1 este egal cu a, iar numărul negru de pe locul 3 este egal cu b. Atunci, datorită regulilor din enunţ, pe locul 2 trebuie să avem numărul alb ab, iar pe locul 4 numărul alb $b - ab$. Să observăm că nu putem avea $a = 1$, căci am obţine $b - ab = 0$, fals. Apoi, pe locul 5 este $\dfrac{b-ab}{b} = 1 - a$, iar pe locul 6 este $1 - a - (b - ab) = (1 - a)(1 - b) \neq 0$, deci $b \neq 1$. Pe locul 7 se află $\dfrac{(1-a)(1-b)}{1-a} = 1 - b$, iar pe locul 8 este numărul alb $1 - b - (1 - a)(1 - b) = a(1 - b)$. Aşadar, pe primele 8 locuri avem secvenţa $a, ab, b, b - ab, 1 - a, (1 - a)(1 - b),\ 1 - b, a(1 - b)$. Mai mult, următorul număr negru, cel de pe locul 9, trebuie să fie egal cu $\dfrac{a(1-b)}{1-b} = a$, iar numărul alb de pe locul 10 trebuie să fie egal cu $a - a(1 - b) = ab$, aşadar secvenţa primelor 8 numere se repetă de $1000 : 8 = 125$ de ori. Deoarece $a + ab + b + (b - ab) + (1 - a) + (1 - a)(1 - b) + (1 - b) + a(1 - b) = 3$, suma celor 1000 de numere este egală cu $3 \cdot 125 = 375$.