Etapa 5, Problema 1

Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,...,2014\}$. Determinați numărul de triplete $(x;y;z)\in A\times A\times A$ cu proprietatea că numerele $x<y<z$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

***

Soluție.

Notăm cu r rația progresiei; atunci $y=x+r$ și $z=x+2r$. Deoarece $1\leq x<x+r<x+2r\leq 2014$ obținem că $2r\leq 2014-x\leq 2013$. Cum $r\in\mathbb{N}^*$, rezultă că $r\in\{1,2,3,...,1006\}$.

Dacă $r=1$, atunci $x\leq 2012$ şi avem 2012 progresii aritmetice.
Dacă $r=2$, atunci $x\leq 2010$ şi avem 2010 progresii aritmetice.
$\vdots$
Dacă $r=1005$, atunci $x\leq 4$ şi avem 4 progresii aritmetice.
Dacă $r=1006$, atunci $x\leq 2$ şi avem 2 progresii aritmetice.
Numărul total de triplete cu proprietatea din problemă este

$$2+4+...+2012=2(1+2+...+1006)=1006\cdot 1007.$$