

Problema 4. Numerele prime a și b sunt lungimile a două dintre laturile unui triunghi, iar cea de a treia latură are lungimea c , număr natural. Arătați că dacă $a^b = a + b$, atunci triunghiul este isoscel sau echilateral.

* * *

Soluție: Din $a^b = a + b$ avem $a^b - a = b$. Cum $a^b - a$ este un număr par deducem că b este număr par și cum b este număr prim obținem $b=2$

Atunci $a^2 - a = 2$ sau $a(a - 1) = 2$

Deoarece a este număr natural prim avem $a = 2$

Deoarece $a = b = 2$ rezultă că triunghiul este isoscel.

Dacă c este lungimea celeilalte laturi, din inegalitatea triunghiului avem $c < a + b$, adică $c < 4$. Cum c este număr natural obținem $c \in \{1, 2, 3\}$, de unde concluzia că pentru $c = 2$ triunghiul devine echilateral.