Clasa a IX-a - Etapa I - Problema 2 - Soluţie

Enunţ. Pentru fiecare număr natural n se consideră mulţimea $A_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Un triplet (A, B, C) de mulţimi se numeşte *preţios* dacă $A \cup B \cup C = A_n$ şi mulţimea $A \cap B \cap C$ are exact două elemente. Notăm cu p_n numărul tripletelor preţioase.

a) Calculaţi p_3

b) Determinaţi numerele prime n pentru care numărul $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ este un număr prim.

Soluţie. **a)** $A_3 = \{1, 2, 3\}$ şi $A \cup B \cup C = A_3$, $|A \cap B \cap C| = 2$. Dacă $A \cap B \cap C = \{1, 2\}$ atunci elementul 3 poate fi în exact una dintre mulţimile A, B, C sau în exact două dintre acestea; obţinem astfel 6 triplete preţioase şi analog dacă $A \cap B \cap C = \{1, 3\}$, respectiv $A \cap B \cap C = \{2, 3\} \Rightarrow p_3 = 18$.

b) Calculăm acum p_n. În primul rând, remarcăm că pentru $|A \cap B \cap C| = 2$ putem alege exact câte două elemente din A_n în $\frac{n(n-1)}{2}$ moduri. Acum vom număra în câte moduri se pot forma mulţimile A, B, C, adăugând la partea comună elemente din diferenţa faţă de A_n (diferenţă care are $n - 2$ elemente). Notăm $X = A \cap B \cap C, D = A \setminus X, E = B \setminus X, F = C \setminus X$ şi astfel avem $D \cap E \cap F = \emptyset, D \cup E \cup F = A_n \setminus X$ şi $|D \cup E \cup F| = n - 2$. Un element oarecare din $A_n \setminus X$ poate fi plasat într-una dintre următoarele 6 mulţimi: $D \setminus (E \cup F), E \setminus (D \cup F), F \setminus (E \cup D)$ sau $D \cap E, F \cap E, D \cap F$, aşadar numărul acestor posibilităţi este egal cu 6^{n-2} În concluzie: $p_n = \frac{n(n-1)}{2} \cdot 6^{n-2}$ şi $r_n = \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{6(n+1)}{n-1} = 6 + \frac{12}{n-1} \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \{3, 4, 5, 7, 13\}$; cum $r_3 = 12, r_5 = 9, r_7 = 8, r_{13} = 7 \Rightarrow n = 13$. $\square$