Problema 2. Demonstrați că nu există triunghiuri dreptunghice cu ipotenuza egală cu $\sqrt{2022}$ și catetele având lungimile exprimate prin numere raționale.

Soluție: Presupunem prin reducere la absurd că se poate. Deci există numerele naturale nenule a, b, c, d astfel încât $\frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{d^2} = 2022| \cdot b^2 d^2$.
$(ad)^2 + (bc)^2 = 2022(bd)^2$. Notez $x = ad, y = bc, z = bd$ și ecuația devine $x^2 + y^2 = 2022z^2$.
Se observă că dacă $d = (x, y, z)$ este cel mai mare divizor comun si (x, y, z) este soluție atunci și $(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d})$ este soluție.
Cum ecuația are soluții cu x, y, z numere naturale nenule, vom alege o soluție (x_0, y_0, z_0) cu z_0 minim.
Cum $3|2022$ atunci $3|x_0^2 + y_0^2$, deci $3|x_0$ și $3|y_0$, deci $9|x_0^2 + y_0^2 = 2022z_0^2 \implies 3|z_0^2 \implies 3|z_0$.
Deci am găsit $(\frac{x_0}{3}, \frac{y_0}{3}, \frac{z_0}{3})$ soluție și $\frac{z_0}{3} < z_0$ contradicție. Deci ecuația nu are soluții în $\mathbb{N}^*$, ceea ce înseamnă că nu există un astfel de triunghi.