ViitoriOlimpici.ro

Problema 2
Etapa 7
Clasa a IX-a

Problema 2. Determinaţi funcţiile $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ ştiind că verifică egalitatea

$$f\Big(xy+f^2(y)\Big)=f(x)f(y)+yf(y),$$

pentru orice $x,y\in(0,\infty)$.

***

Soluţie. Fie $P(x,y): f(xy+f^2(y))=f(x)f(y)+yf(y)$, $x,y\in(0,\infty)$.
$P(x,1): f(x+c^2)=cf(x)+c$, unde $c=f(1)$.
$P\left(x+\dfrac{c^2}{y},y\right): f\left(xy+f^2(y)+c^2\right)=f\left(x+\dfrac{c^2}{y}\right)f(y)+yf(y)$.

$$P\left(xy+f^2(y),1\right): f(xy+f^2(y)+c^2)=cf(xy+f^2(y))+c$$
$$=cf(x)f(y)+cyf(y)+c.$$

Scăzând ultimele două relaţii, deducem că pentru orice $x,y\in(0,\infty)$ are loc $Q(x,y): f\left(x+\dfrac{c^2}{y}\right)=cf(x)+(c-1)y+\dfrac{c}{f(y)}$.

$$Q(x+c^2,y): f\left(x+\frac{c^2}{y}+c^2\right)=cf(x+c^2)+(c-1)y+\frac{c}{f(y)}$$
$$=c^2f(x)+c^2+(c-1)y+\frac{c}{f(y)}.$$

Folosind $P(x,1)$ şi $Q(x,y)$, obţinem

$$f(x+\frac{c^2}{y}+c^2)=cf(x+\frac{c^2}{y})+c$$
$$=c^2f(x)+(c^2-c)y+\frac{c^2}{f(y)}+c.$$

Rezultă $c^2f(x)+c^2+(c-1)y+\dfrac{c}{f(y)}=c^2f(x)+(c^2-c)y+\dfrac{c^2}{f(y)}+c$, de unde $(c^2-2c+1)y+\dfrac{c^2-c}{f(y)}=c^2-c$.

Dacă $c\neq1$, obţinem $(c-1)y+\dfrac{c}{f(y)}=c$, adică $f(y)=\dfrac{1}{1+\left(1-\frac{1}{c}\right)y}$, care nu convine, deci $c=1$.

În acest moment $P(x,1)$ devine: $f(x+1)=f(x)+1$, $x\in(0,\infty)$, iar $Q(x,y)$ devine $R(x,y): f\left(x+\dfrac{1}{y}\right)=f(x)+\dfrac{1}{f(y)}$, $x,y\in(0,\infty)$.

Avem $R(1,y): f\left(\frac{1}{y}\right)=\dfrac{1}{f(y)}$ şi $R\left(x,\dfrac{1}{y}\right): f(x+y)=f(x)+f(y)$, pentru orice $x,y\in(0,\infty)$. Rezultă $f(x)=f(1)\cdot x$, pentru orice $x>0$.

În concluzie, $f(x)=x$, pentru orice $x>0$, funcţie care convine.