Problema 2
Etapa 6
Clasa a V-a

Problema 2. Determinați numărul natural n și numerele naturale a, b și c pentru care numărul $A = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 13}$ devine cel mai mic număr natural, în condițiile date.

* * *

Soluție: Pentru ca numărul $\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 13}$ să devină număr natural trebuie ca $2^a, 3^b, 5^c$ și 13 să dividă $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Din $13 \mid 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ și A cel mai mic posibil deducem că $\boxed{\text{n=13}}$.

Din $2^a \mid 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 13$ și A cel mai mic posibil rezultă că a este egal cu numărul factorilor egali cu 2 care apar în produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 13$.

Factorul 2 apare câte o dată la 2, la 6 și la 10; de câte două ori la 4 și la 12; de trei ori la 8. În total, factorul 2 apare de 10 ori $(3 + 4 + 3)$, deci $\boxed{\text{a=10}}$.

Din $3^b \mid 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 13$ și A cel mai mic posibil rezultă că b este egal cu numărul factorilor egali cu 3 care apar în produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 13$.

Factorul 3 apare câte o dată la 3, la 6 și la 12; de două ori la 9. În total, factorul 3 apare de 5 ori $(3 + 2)$, deci $\boxed{\text{b=5}}$.

Din $5^c \mid 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 13$ și A cel mai mic posibil rezultă că c este egal cu numărul factorilor egali cu 5 care apar în produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 13$.

Factorul 5 apare câte o dată la 5 și la 10. În total, factorul 5 apare de 2 ori, deci $\boxed{\text{c=2}}$.