**Problema 2.** Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Determinaţi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \infty)$, ştiind că $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 9$ şi $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = 1$.

*****

**Soluţie.** Cu inegalitatea mediilor obţinem

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \cdot \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2, \tag{1}$$

deci $9 \geq n^2$, de unde $n \in \{1, 2, 3\}$.

În cazul $n = 1$ obţinem $x_1 = 9$ şi $\frac{1}{x_1} = 1$, evident imposibil.

În cazul $n = 2$ obţinem sistemul $\begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \\ x_1 x_2 = 9 \end{cases}$.

Deoarece ecuaţia $t^2 - 9t + 9 = 0$ are soluţiile $t_1 = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{2}$ şi $t_1 = \frac{9 - 3\sqrt{5}}{2}$, deducem că $(x_1, x_2) \in \{(t_1, t_2); (t_2, t_1)\}$.

În cazul $n = 3$, avem $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ şi $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 1$. Atunci inegalitatea (1) devine egalitate şi obţinem $x_1 = x_2 = x_3 = 3$. Evident tripletul $(x_1, x_2, x_3) = (3, 3, 3)$ convine problemei.