SOLUȚIE

Problema 4
Fie $n \geq 2$ un număr natural. Determinaţi valoarea minimă a expresiei

$$E(x) = |x-1| + |x-2| + ... + |x-n|,$$

când x parcurge mulţimea numerelor reale.

Aurel Bârsan

Soluţie:

Observăm mai întâi că, dacă $a < b$,

$$|x-a| + |x-b| = |a-x| + |x-b| \geq |(a-x) + (x-b)| = |a-b| = b-a,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $x \in [a, b]$.

Cazul 1. $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$.
Folosind obsevaţia anterioară, obţinem

$$E(x) = (|x-1|+|x-2k|)+...+(|x-k|+|x-(k+1)|) \geq (2k-1)+(2k-3)+...+1 = k^2, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Cum $E(x) = k^2$, pentru $x \in [k, k+1]$, rezultă $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} E(x) = k^2$.

Cazul 2. $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$.
Analog,

$$E(x) = (|x-1|+|x-(2k+1)|)+...+(|x-k|+|x-(k+2)|)+|x-(k+1)| \geq$$

$$\geq 2k + (2k-2) + (2k-4) + ... + 2 + 0 = k(k+1), \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Cum $E(k+1) = k(k+1)$, rezultă $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} E(x) = k(k+1)$.