Problema 3
Etapa 7
Clasa a IX-a

**Problema 3.** Fie $I$ centrul cercului înscris şi $\Omega$ cercul circumscris triunghiului $ABC$, iar $L$ intersecţia tangentelor în $B$ şi $C$ la $\Omega$. Fie $P \neq C$ un punct pe cercul $\Omega$ astfel încât $CI, AP$ şi cercul cu centrul în $L$ de rază $LC$ sunt concurente. Vom nota cu $F$ piciorul perpendicularei din $I$ pe $AB$ şi cu $M$ mijlocul segmentului $[BC]$. De asemenea $X$ este un punct pe cercul $\Omega$ astfel încât $AI, BC, PX$ sunt concurente. Arătaţi că dreptele $AI, AX, MF$ determină un triunghi isoscel.

***

**Soluţie.** Tratăm mai întâi cazul când $\sphericalangle ABC > \sphericalangle BAC$. Demonstrăm că unghiul dintre $AI$ şi $AX$ este congruent cu unghiul dintre $AI$ şi $MF$. Fie $D$ al doilea punct de intersecţie a dreptei $AI$ cu cercul $\Omega$ şi $DP \cap BC = \{Q\}$, $AI \cap BC = \{E\}$, $AP \cap CI = \{K\}$.

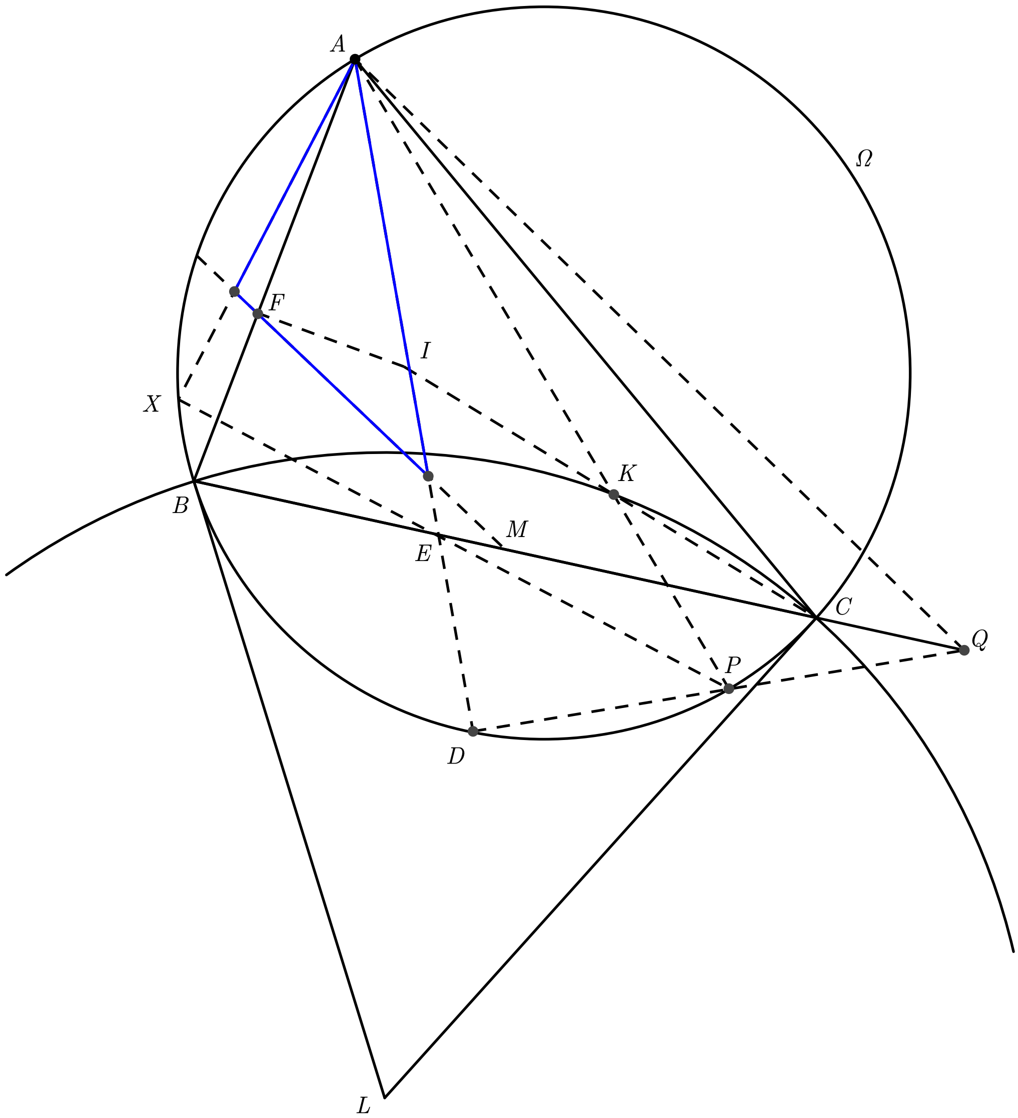
Atunci unghiul dintre $AI$ şi $AX$ este $\sphericalangle DAX = \sphericalangle DPX = \sphericalangle DPE$. Similar, $\sphericalangle AEB = \sphericalangle APD$. Rămâne de arătat că $\sphericalangle FMB = \sphericalangle APE$.

Din $\sphericalangle AEQ = \sphericalangle APQ$ şi $AEPQ$ inscriptibil obţinem $\sphericalangle APE = \sphericalangle AQE$. Avem succesiv $\dfrac{BQ}{QC} = \dfrac{BP}{PC} \cdot \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BP}{PC} = \dfrac{\sin(\sphericalangle PCB)}{\sin(\sphericalangle PBC)} = \dfrac{\sin(\sphericalangle PAB)}{\sin(\sphericalangle PAC)}$.

Dar $\sin(\sphericalangle PAB) = \dfrac{BK\sin(\sphericalangle KBA)}{AK}$ şi $\sin(\sphericalangle PAC) = \dfrac{CK\sin(\sphericalangle KCA)}{AK}$, prin urmare avem:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\sphericalangle PAB)}{\sin(\sphericalangle PAC)} &= \frac{BK\sin(\sphericalangle KBA)}{CK\sin(\sphericalangle KCA)} = \frac{\sin(\sphericalangle KCB)\cdot\sin(\sphericalangle KBA)}{\sin(\sphericalangle KBC)\cdot\sin(\sphericalangle KCA)}\\ &= \frac{\sin(\sphericalangle KBA)}{\sin(\sphericalangle KBC)} = \frac{\sin\frac{B+A}{2}}{\sin\frac{B-A}{2}} = \frac{\sin C}{\sin B - \sin A}\\ &= \frac{c}{b-a}.\end{aligned}$$

Rezultă că $\dfrac{BQ}{QC} = \dfrac{c}{b-a}$, iar de aici deducem $\dfrac{BM}{MQ} = \dfrac{a+c-b}{b+c-a} = \dfrac{BF}{FA}$, adică $FM \parallel AQ$, deci $\sphericalangle FMB = \sphericalangle AQE = \sphericalangle APE$.



A
Ω
F
I
X
K
B
M
E
C
Q
P
D
L