Problema 1. Rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{N}^*$ inecuaţia:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\leqslant\frac{3}{5}.$$

***

Soluţie. Ştim că pentru orice număr natural nenul n,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}.$$

Avem de rezolvat inecuaţia:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\leqslant\frac{3}{5}. \tag{1}$$

Pentru $n=1$, obţinem $1-\frac{1}{2}\leqslant\frac{3}{5}$, (A).
Pentru $n=2$, obţinem $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\leqslant\frac{3}{5}$, (A).
Pentru $n=3$, obţinem $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{37}{36}\leqslant\frac{3}{5}$, (F).
Pentru $n\geqslant 3$, are loc:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\underbrace{\frac{37}{36}}_{>\frac{3}{5}}+\underbrace{\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)}_{>0}+\ldots+\underbrace{\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)}_{>0}>\frac{3}{5}$$

Soluţiile inecuaţiei (1) sunt $n=1$ şi $n=2$.