Etapa 4, Problema 2
Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia

$$2^{\sin t}+2^{\cos t}=3.$$

Laurenţiu Panaitopol

Soluţie.
Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=2^{\sin t}+2^{\cos t}$ este periodică, cu perioada principală $T=2\pi$. Vom arăta că singurele soluţii ale ecuaţiei din intervalul $[0,2\pi)$ sunt $t=0$ şi $t=\frac{\pi}{2}$, deci mulţimea soluţiilor ecuaţiei va fi

$$\{2k\pi|k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Fiecare dintre numerele $2^{\sin t}$ şi $2^{\cos t}$ este cel mult egal cu 2 şi, cum suma lor este 3, ambele vor fi cel puţin egale cu 1; rezultă că $\sin t$ şi $\cos t$ sunt nenegative, prin urmare $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$. Evident că $t=0$ şi $t=\frac{\pi}{2}$ verifică ecuaţia, deci este destul să mai demonstrăm că nu există alte soluţii $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Există un unic $x\in(0,1)$ pentru care $\sin t=x, \cos t=\sqrt{1-x^2}$. Cum ecuaţia $2^{\sin t}+2^{\cos t}=3$ este invariantă la trasformarea $t\to\frac{\pi}{2}-t$, putem considera că $t\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, prin urmare ar rămâne să dovedim că ecuaţia $2^x+2^{\sqrt{1-x^2}}=3$ nu are soluţii în intervalul $(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$.

Vom demonstra că $2^x+2^{\sqrt{1-x^2}}>3, \forall x\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$. Întrucât

$$2\cdot\left(2^x+2^{\sqrt{1-x^2}}\right)=2^{x+1}+2^{\sqrt{1-x^2}}+2^{\sqrt{1-x^2}}\geq 3\sqrt[3]{2^{x+1+2\sqrt{1-x^2}}},$$

ar fi destul să arătăm că $2^{x+1+2\sqrt{1-x^2}}>8$. Această inegalitate se poate scrie sub forma $2\sqrt{1-x^2}>2-x$. Pe intervalul $(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$ ambii membri sunt pozitivi; ridicăm la pătrat şi vom avea de demonstrat că $5x^2-4x<0, \forall x\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$, ceea ce este, evident, adevărat.

Soluţie alternativă.
Putem demonstra că ecuaţia $2^{\sin t}+2^{\cos t}=3$ nu are soluţii $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi folosind inegalitatea

$$2^x>x^2+1, \forall x\in(0,1). \qquad (*)$$

Într-adevăr, rezultă imediat că $2^{\sin t}+2^{\cos t}>\left(\sin^2 t+1\right)+\left(\cos^2 t+1\right)=3, \forall t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Această soluţie este, evident, cea naturală, însă ea prezintă dezavantajul că inegalitatea (*) nu este la indemâna unui elev de clasa a X-a (demonstraţia necesită studiul variaţiei unei funcţii cu ajutorul derivatei sale).