4. Considerăm cubul ABCDA'B'C'D' și punctele: $M_k \in (A'D')$, $N_k \in (CC')$, $P_k \in (AB)$ încât are loc:

$$\frac{A' M_k}{M_k D'} = \frac{C' N_k}{N_k C} = \frac{B P_k}{P_k A} = k,$$

unde **k** este un număr real strict pozitiv.

Demonstrați că planele ($M_k N_k P_k$) au aceeași direcție pentru orice k număr real strict pozitiv.

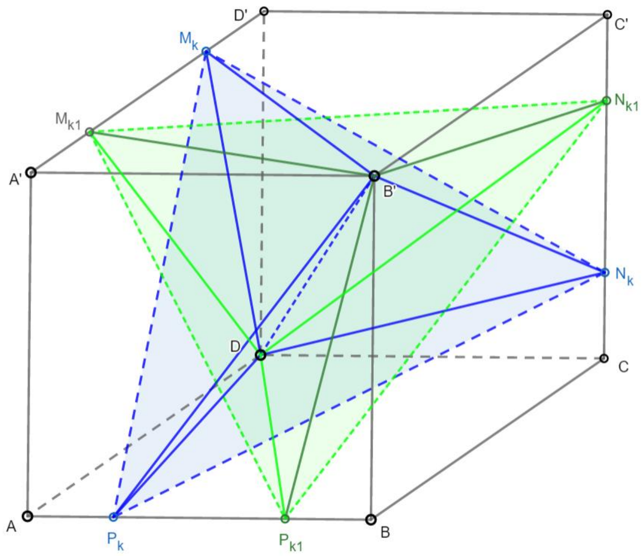
Petru Braica, Satu Mare

Soluție. *Vom urma trei pași pentru a rezolva cerința problemei.*

Pasul 1. Demonstrăm că triunghiul $M_k N_k P_k$ este echilateral pentru orice număr real strict pozitiv k;

Pasul 2. Demonstrăm că tetraedrele $DM_kN_kP_k$ și $B'M_kN_kP_k$ sunt piramide regulate de baze $\Delta M_kN_kP_k$;

Pasul 3. Are loc afirmația: planele $(M_kN_kP_k)$ au aceeași direcție pentru orice k număr real strict pozitiv.



Pasul 1. Avem că $C'N_k = A'M_k = BP_k$, prin urmare are loc:

$$\Delta N_kC'M_k \equiv \Delta M_kA'P_k \equiv \Delta P_kBN_k \text{ (cazul C.C.)},$$

deoarece congruențele:

$$C'M_k \equiv A'P_k \equiv N_kB,$$

rezultă din congruența triunghiurilor:

$$\Delta C'D'M_k \equiv \Delta A'AP_k \equiv \Delta BCN_k,$$

de unde are loc cerința pasului 1.

Pasul 2. Au loc congruențele:

$$\Delta B'BP_k \equiv \Delta B'A'M_k \equiv \Delta B'C'N_k \text{ (cazul C.C.)},$$

de unde rezultă:

$$BP_k \equiv BM_k \equiv BN_k,$$

deci piramida $B'M_kN_kP_k$, de vârf B' și bază triunghiul $M_kN_kP_k$, este regulată.

În mod asemănător se demonstrează că și piramida $DM_kN_kP_k$ este regulată, comform definiției, are baza triunghi echilateral iar muchiile laterale sunt congruente.

Pasul 3. Dacă vom considera centrul cercului circumscris triunghiului $\Delta M_kN_kP_k$, notat cu S, în baza punctului precedent avem că dreptele BS și DS vor fi perpendiculare pe planul bazei comune celor două piramide. Întrucât perpendiculara într-un punct S pe un plan $(M_kN_kP_k)$, este unică deducem că punctele B', S, D sunt coliniare și B'D este perpendiculară pe planul triunghiului echilateral $\Delta M_kN_kP_k$. Am ales un număr k arbitrar așadar planele $(M_kN_kP_k)$ vor fi perpendiculare pe dreapta fixă B'D, de unde concluzionăm că aceste plane au aceeași direcție, mereu perpendiculară pe diagonala cubului.

Cu aceasta problema este rezolvată.