Problema 1. Fie $x, y, z > 0$ astfel încât $xyz = 1$. Arătaţi că

$$\frac{x^3}{x^2+y} + \frac{y^3}{y^2+z} + \frac{z^3}{z^2+x} \geq \frac{3}{2}.$$

****

Soluţie. Inegalitatea cerută se scrie succesiv: $\sum_{cyc} \frac{x^3}{x^2+y} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow$ $\sum_{cyc} \left(\frac{x^3}{x^2+y} - x \right) \geq \frac{3}{2} - x - y - z \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{cyc} \frac{-xy}{x^2+y} \geq \frac{3}{2} - x - y - z,$ (1).

Folosind inegalitatea mediilor, avem $\frac{-xy}{x^2+y} \geq \frac{-xy}{2x\sqrt{y}} = -\frac{\sqrt{y}}{2}$. Pentru a demonstra (1) este suficient să arătăm că $-\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{\sqrt{y}}{2} - \frac{\sqrt{z}}{2} \geq \frac{3}{2} - x - y - z$, ceea ce este echivalent cu $3 + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 2(x+y+z)$, (2).

Folosind iar inegalitatea mediilor, avem $\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$ şi pentru a proba (2) este suficient să arătăm că $3 + \frac{x+1}{2} + \frac{y+1}{2} + \frac{z+1}{2} \leq 2(x+y+z)$, ceea ce este echivalent cu $3 \leq x+y+z$. Ultima inegalitate este o consecinţă imediată a inegalităţii mediilor: $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} = 1$.

Observaţie. Avem egalitate dacă şi numai dacă $x = y = z = 1$.