SOLUȚIE

Enunţ: *Fie* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *o funcţie cu proprietatea* $|f(x)-f(y)|\le|x-y|$, *pentru orice* $x,y\in\mathbb{R}$. *Dacă, pentru orice* $x\in\mathbb{R}$, *şirul* $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots$ *este progresie aritmetică atunci există* $a\in\mathbb{R}$ *astfel încât* $f(x)=x+a$, *pentru orice* $x\in\mathbb{R}$.

Proof. Presupunem că există numerele reale distincte x,y pentru care $f(x)-x>f(y)-y$. Dacă notăm $p=f(x)-x$ atunci obţinem $f(f(x))-f(x)=p$, de unde $f(x+p)=x+2p$ şi, inductiv, $f(x+np)=x+(n+1)p$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$. Analog, notaţia $f(y)-y=q$ conduce la $f(y+nq)=y+(n+1)q$.

Dar din ipoteză avem şi $|f(x+np)-f(y+nq)|\le|x+np-y-nq|$ adică

$$|(x-y)+(n+1)(p-q)|\le|(x-y)+n(p-q)|,$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$.Pentru n suficient de mare obţinem

$$(x-y)+(n+1)(p-q)\le(x-y)+n(p-q)$$

ceea ce conduce la $p-q\le 0$, deci contradicţie şi demonstraţia este încheiată. $\square$