Problema 2. Determinaţi prima zecimală a numărului $\sqrt{n^2+n}$, unde n este un număr natural nenul oarecare.

* * *

Soluţie. Din inegalitatea $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$ rezultă că $n < \sqrt{n^2+n} < n+1$, de unde deducem că $[\sqrt{n^2+n}] = n$. Prima zecimală a numărului $\sqrt{n^2+n}$ este deci $[10(\sqrt{n^2+n}-n)]$. Observăm că

$$10(\sqrt{n^2+n}-n) = \frac{10n}{\sqrt{n^2+n}+n} < \frac{10n}{2n} = 5.$$

Verificăm inegalitatea $10(\sqrt{n^2+n}-n) = \frac{10n}{\sqrt{n^2+n}+n} > 4$. Aceasta este echivalentă cu $3n > 2\sqrt{n^2+n}$, care, după ridicare la pătrat şi reducerea termenilor, devine $5n^2 > 4n$, adevărată pentru orice n natural nenul oarecare. Astfel obţinem că $[10(\sqrt{n^2+n}-n)] = 4$.

Cu $[x]$ am notat partea întreagă a numărului real x.