

Problema 4. Câte numere naturale de trei cifre au suma cifrelor 9?

* * *

Soluție. Suma 9 poate fi obținută în următoarele moduri: $9 + 0 + 0$, $8 + 1 + 0$, $7 + 2 + 0$, $7 + 1 + 1$, $6 + 3 + 0$, $6 + 2 + 1$, $5 + 4 + 0$, $5 + 3 + 1$, $5 + 2 + 2$, $4 + 4 + 1$, $4 + 3 + 2$, $3 + 3 + 3$.

Cu cifrele a, b, c diferite între ele și nenule se pot obține 6 numere naturale (\overline{abc} , \overline{bca} , \overline{cab} , \overline{cba} , \overline{acb} , \overline{bac}).

Atunci, pentru fiecare din situațiile $6 + 2 + 1$, $5 + 3 + 1$, $4 + 3 + 2$ obținem câte 6 numere, în total $6 \cdot 3 = 18$ numere.

Când cifrele sunt nenule, dar două dintre ele sunt egale se pot obține 3 numere naturale (\overline{aab} , \overline{aba} , \overline{baa}).

Atunci pentru fiecare din situațiile $7 + 1 + 1$, $5 + 2 + 2$, $4 + 4 + 1$ obținem câte 3 numere, în total $3 \cdot 3 = 9$ numere.

Cu două cifre nenule diferite și o cifră egală cu 0 obținem 4 numere naturale ($\overline{ab0}$, $\overline{a0b}$, $\overline{ba0}$, $\overline{b0a}$).

Atunci pentru fiecare din situațiile $8 + 1 + 0$, $7 + 2 + 0$, $6 + 3 + 0$, $5 + 4 + 0$ obținem câte 4 numere, în total $4 \cdot 4 = 16$ numere.

Să nu uităm cazurile $9 + 0 + 0$ și $3 + 3 + 3$ de unde mai obținem 2 numere.

Cum $18 + 9 + 16 + 2 = 45$ rezultă că avem 45 de numere naturale de trei cifre cu suma cifrelor 9.