Problema 4.

Se consideră tertraedrul *OABC* în care $OA \perp OB \perp OC \perp OA$. O sferă care conține punctele *A*, *B* și *C* intersectează a doua oară muchiile *OA*, *OB* și *OC* în punctele *A'*, *B'*, respectiv, *C'*. Dacă *G* este centrul de greutate al triunghiului *ABC* și *H* este ortocentrul triunghiului *A'B'C'*, arătați că $OG \perp (A'B'C')$ și că punctele *O*, *G* și *H* sunt coliniare.

Soluție.

Planul *OBC* intersectează sfera după un cerc, deci patrulaterul *BCC'B'* este inscriptibil, de unde rezultă că $\sphericalangle OB'C' \equiv \sphericalangle OCB$. Dar $\sphericalangle CON \equiv \sphericalangle OCB$, deoarece *ON* este mediană în triunghiul dreptunghic *OBC*, deci $\sphericalangle OB'C' \equiv \sphericalangle OCN$. Dar $\widehat{OB'C'} + \widehat{OC'B'} = 90^{\circ}$, deci $\widehat{DOC'} + \widehat{OC'D} = 90^{\circ}$, de unde $B'C' \perp ON$ (1). Dim $OA \perp (OBC)$ și $B'C' \subset (OBC)$ rezultă că $B'C' \perp OA$ (2). Din (1) și (2) rezultă că $B'C' \perp (OAN)$, dar $OG \subset (OAN)$, deci $OG \perp B'C'$. Analog $OG \perp A'B'$, deci $OG \perp (A'B'C')$ (3).

Se știe că, în condițiile date, dacă *H* este ortocentrul triunghiului *A'B'C'*, atunci $OH \perp (A'B'C')$ (4). Din (3) și (4) rezultă că punctele *O*, *G* și *H* sunt coliniare.