SOLUŢIE

3. În interiorul unui triunghi ABC considerăm punctul T care are proprietatea că $\sphericalangle BTC = \sphericalangle CTA = \sphericalangle ATB$. Arătaţi că

$$2 \cdot AB + 2 \cdot BC + 2 \cdot CA > 4 \cdot AT + 3 \cdot BT + 2 \cdot CT.$$

Soluţie: Fie punctul D mijlocul segmentului TB şi punctul E situat pe dreapta AT, T între A şi E, astfel încât $TD = TE$. Atunci $\sphericalangle TED = \sphericalangle TDE = 60°$, de unde triunghiul TED este echilateral şi $DB = DT = DE$, de unde deducem că triunghiul TEB este dreptunghic în E. Prin urmare şi triunghiul AEB este dreptunghic în E, astfel că

$$AB > AE = AT + TE = AT + TB = AT + \frac{1}{2}BT.$$

În mod similar obţinem inegalităţile $AC > AT + \frac{1}{2}CT$ şi $BC > BT + \frac{1}{2}CT$. Adunând, apoi înmulţind inegalitatea obţinută cu 2 rezultă că

$$2 \cdot AB + 2 \cdot BC + 2 \cdot CA > 4 \cdot AT + 3 \cdot BT + 2 \cdot CT.$$

Observaţie: Punctul T cu proprietatea din enunţ se numeşte *punctul Torricelli-Fermat* al triunghiului ABC.