Problema 3
Etapa a 5-a
Clasa a VII-a

Problema 3. Fie triunghiul ABC , pe laturile căruia considerăm punctele A_1, B_1, C_1 astfel încât A_1 să fie la jumătatea traseului CAB, B_1 la jumătatea traseului ABC, iar C_1 la jumătatea traseului BCA. Prin punctul A_1 ducem paralela la bisectoarea unghiului $\sphericalangle CAB$, care intersectează (BC) în punctul A_2, prin punctul B_1 ducem paralela la bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$, care intersectează (AC) în punctul B_2, iar prin punctul C_1 ducem paralela la bisectoarea unghiului $\sphericalangle BCA$, care intersectează (AB) în punctul C_2. Arătaţi că dreptele AA_2, BB_2 şi CC_2 sunt concurente.

Traseul CAB înseamnă suma lungimilor segmentelor CA şi AB, traseul ABC înseamnă suma lungimilor segmentelor AB şi BC iar traseul BCA înseamnă suma lungimilor segmentelor BC şi CA.

Gabriel Tica , Craiova

Soluţie. Fie $(AD$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle CAB$, $D \in (BC)$. Din teorema bisectoarei în triunghiul ABC, folosind proprietatea şirului de rapoarte egale, avem $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{CD} = \dfrac{AB + AC}{BC}$ (1).

Considerăm $AB < AC$, deci $A_1 \in (AC)$. Cum $A_1A_2 \parallel AD$, din teorema lui Thales obţinem $\dfrac{CA_1}{CA} = \dfrac{CA_2}{CD}$. De aici $\dfrac{CA_1}{CA_2} = \dfrac{CA}{CD}$. Înlocuim $CA_2 = \dfrac{AB + AC}{2}$ şi obţinem $\dfrac{AB + AC}{2CA_2} = \dfrac{CA}{CD}$ (2).

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă că $2CA_2 = BC$, deci C_2 este mijlocul lui BC, deci AA_2 este mediană. Analog obţinem că BB_2 şi CC_2 sunt mediane în triunghiul ABC, prin urmare cele trei drepte sunt concurente în centrul de greutate al acestui triunghi.