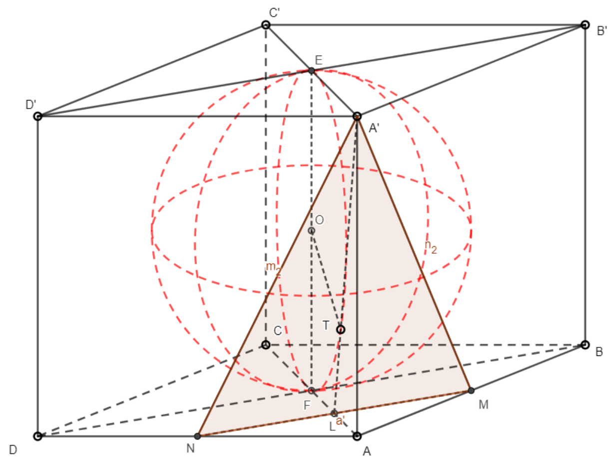
2. Fie cubul ABCDA’B’C’D’ , iar punctele M și N sunt mijloacele muchiilor (AB) respectiv (AD). Demonstrați că planul (A’MN) este tangent sferei înscrise în cub.

(*Concurs de ocupare a posturilor vacante, 1997*)

***Soluție*.**



Un plan este tangent unei sfere dacă și numai dacă distanța de la centrul sferei la plan este egal cu raza sferei considerate. Centrul sferei înscrise în cub este centrului cubului notat cu O care este mijlocul segmentului determinat de centrele a două baze opuse ale cubului. Raza sferei are astfel lungimea jumătate din lungimea muchiei cubului. Așadar rezolvarea problemei se reduce la a arăta că lungimea distanței de la punctul O la planul (A’MN) este egală cu jumătate din lungimea muchiei cubului. Segmentul MN este linie mijlocie în triunghiul ABD, deci intersecția L cu diagonala AC este mijloc pentru AF. Planul soluției urmează următorii pași:

Pasul 1 Identificăm perpendiculara din O pe planul (A’MN) ca fiind perpendiculara dusă din O pe dreapta AL, notată cu OT.

Pasul 2. Verificăm prin calcul în secțiunea diagonală ACC’A’ că lungimea OT este jumătate din lungimea muchiei cubului.

Astfel problema este rezolvată complet.

Din BD perpendiculară pe dreptele AC și AA’ deducem că BD este perpendiculară pe planul (ACC’A’), plan ce include dreapta OT, așadar MN este perpendiculară pe OT deoarece MN este paralelă cu BD. Deci OT este simultan perpendiculară pe dreptele concurente MN și A'L, prin urmare este perpendiculară pe planul (A'MN). Cu asta *Pasul 1* este dovedit.

Pentru a demonstra că lungimea distanței OT = AB / 2 vom lucra în planul secțiunii diagonale (AA'C'C). Vom calcula aria triunghiului A'OL în două moduri de unde va ieși lungimea segmentului OT. Să notăm lungimea muchiei cubului cu 2a, cu a număr strict pozitiv. Aria triunghiului LOA' poate fi calculată pe de o parte ca

semiprodusul dintre OT și A'L iar pe de altă parte ca diferență între aria dreptunghiului A'EFA și ariile triunghiurilor A'EO, A'AL și OFL.

Astfel avem că:

$$S(AEO) = a^2\frac{\sqrt{2}}{2},\ S(OFL) = a^2\frac{\sqrt{2}}{4},\ S(AAL) = a^2\frac{\sqrt{2}}{2},$$

iar aria dreptunghiului:

$$S(AEFA) = 2a^2\sqrt{2},$$

De unde aria triunghiului A'OL este:

$$S(A'OL) = S(A'EFA) – S(A'EO) - S(A'AL) - S(LFO) = 3a^2\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Cu teorema lui Pitagora în triunghiul A'AL, dreptunghic în A se obține A'L = $3a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Din exprimarea ariei triunghiului A'OL cu înălțimea din O, OT se obține că:

$$OT = 2\ S(A'OL) / A'P = a,$$

de unde concluzia problemei urmează.