Problema
Etapa a -a
Clasa a VII-a

Problema . Fie triunghiul ascuţitunghic ABC , $(BD$ şi $(CE$ bisectoarele unghiurilor ABC şi respectiv ACB, $D \in (AC)$, $E \in (AB)$. Pe semidreptele $(BD$ şi $(CE$ considerăm punctele B', respectiv C', astfel încât $AB'IC'$ să fie paralelogram, $D \in (BB')$, $E \in (CC')$, iar $\{I\} = BD \cap CE$. Ştiind că măsura unghiului BAC este egală cu $60°$, arătaţi că dreapta $B'C'$ trece prin punctul de intersecţie a cercurilor circumscrise triunghiurilor BEB' şi CDC'.

Gabriel Tica , Craiova

Soluţie. Fie punctul P pe $B'C'$ astfel încât $\sphericalangle PAD = \sphericalangle IB'C'$ şi $\sphericalangle PAE = \sphericalangle IC'B'$ (*). Punctul P există deoarece $\sphericalangle IB'C' + \sphericalangle IC'B' = 180° - \sphericalangle B'IC' = 180° - \sphericalangle BIC = \frac{1}{2}(\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB) = 60° = \sphericalangle BAC$.

Din relaţiile (*) rezultă că patrulaterele $PEC'A$ şi $PDB'A$ sunt inscriptibile. Atunci $\sphericalangle PEA = \sphericalangle PC'A = \sphericalangle PB'I$, deci patrulaterul $BEPB'$ este inscriptibil. Analog, patrulaterul $CDPC'$ este inscriptibil. Prin urmare cercurile circumscrise triunghiurilor BEB' şi CDC' se intersecteaz ă în punctul P, care se găseşte pe dreapta $B'C'$.