Problema 1. Fie $z = \cos\dfrac{\pi}{1012} + i \cdot \sin\dfrac{\pi}{1012} \in \mathbb{C}$.
Determinaţi intersecţia mulţimilor
$A = \{1+z, 1+z+z^2, \ldots, 1+z+\ldots+z^{2024}\}$ şi $B = \{z, z^2, \ldots, z^{2024}\}$.

* * *

Soluţie. Observăm că $1 \in A \cap B$. Dacă $|A \cap B| \geqslant 2$, fie $\alpha \in A \cap B$, cu $\alpha \neq 1$ şi $k, n \in \{1, 2, \ldots, 2024\}$, astfel încât

$$\alpha = z^n = 1 + z + \ldots + z^k = \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z}.$$

$|\alpha| = |z|^n = 1$, deci $|1 - z^{k+1}| = |1 - z|$, aşadar $\sin\dfrac{(k+1)\pi}{2024} = \sin\dfrac{\pi}{2024}$.
Obţinem $\dfrac{(k+1)\pi}{2024} = \pi - \dfrac{\pi}{2024}$, deci $k = 2022$.

Rezultă că $\alpha = 1 + z + \ldots + z^{2022} = \dfrac{1 - z^{2023}}{1 - z} = \dfrac{1 - \frac{1}{z}}{1 - z} = -\dfrac{1}{z} \in A$.

Deoarece $z^{1012} = -1$, pentru $n = 1011$ avem $z^{1011} = -\dfrac{1}{z} = \alpha \in B$, aşadar $A \cap B = \left\{1, -\dfrac{1}{z}\right\}$.