

Problema 3. Determinați numerele naturale x și y pentru care $x^3 + y^3 + x + y = 4^{x-y} + 3$, $x \geq y$.

* * *

Soluție: Folosim următoarele rezultate evidente:

1. Un număr natural ridicat la o putere nu își schimbă paritatea.
2. Suma a două numere de aceeași paritate dă un număr par.

Atunci x^3 și x au aceeași paritate, deci suma lor, $x^3 + x$, este un număr par. La fel, $y^3 + y$ este un număr par.

Rezultă că membrul stâng al egalității este un număr par.

Dacă $x \neq y$, atunci 4^{x-y} este număr par și deci $4^{x-y} + 3$ este număr impar. În acest caz egalitatea nu este posibilă.

Dacă $x = y$ obținem $2x^3 + 2x = 4$ sau $x^3 + x = 2$, de unde $x = 1$ și la fel $y = 1$.