

**P3.** Fie  $(G, \cdot)$  un grup, iar  $H_1, H_2, H_3 \leq G$  trei subgrupuri ale sale. Arătați că  $H_3 \subseteq H_1 \cup H_2$  dacă și numai dacă  $H_3 \subseteq H_1$  sau  $H_3 \subseteq H_2$ .

**S.** Evident, dacă  $H_3 \subseteq H_1$  sau  $H_3 \subseteq H_2$ , atunci  $H_3 \subseteq H_1 \cup H_2$ .

Dacă  $H_3 \subseteq H_1 \cup H_2$ , să presupunem că  $H_3 \not\subseteq H_1$  și  $H_3 \not\subseteq H_2$ . Există atunci  $x \in H_3 \setminus H_1$ , respectiv  $y \in H_3 \setminus H_2$ . Cum  $H_3 \subseteq H_1 \cup H_2$ , rezultă că  $x \in H_2 \setminus H_1$  și  $y \in H_1 \setminus H_2$ . Dar atunci  $xy \in H_3 \setminus (H_1 \cup H_2)$ , ceea ce contrazice ipoteza că  $H_3 \subseteq H_1 \cup H_2$ . Presupunerea făcută este deci greșită, astfel că în acest caz  $H_3 \subseteq H_1$  sau  $H_3 \subseteq H_2$ .