Problemă. Fie n un întreg pozitiv, pentru care există cinci numere întregi pozitive, astfel încât n nu divide pe niciunul, dar n divide produsul lor. Arătaţi că atunci există şi patru numere întregi pozitive, astfel încât n nu divide pe niciunul, dar n divide produsul lor.

Olimpiada Tuymaada, 2010

Soluţie. Din păcate, problema enunţată ca mai sus prezintă o omisiune majoră. Cele cinci numere de care se face vorbire sunt date a fi consecutive, şi la fel, cele patru numere care se cer trebuie şi ele să fie consecutive. Ne cerem scuzele de rigoare.

Numărul n nu poate fi un prim p, din motive evidente; nu poate fi egal cu $2^2 = 4$, căci unul din cinci numere consecutive este divizibil prin 4; nu poate fi o putere p^α a unui prim $p \geq 5$, cu $\alpha \geq 2$, căci $p \mid a$, $p \mid b$, $a \neq b$, implică $|a-b| \geq p \geq 5$. Am putea avea însă $n = 2^\alpha$, cu $\alpha \geq 3$, căci

$$2^\alpha \mid (2^{\alpha-1}-1)2^{\alpha-1}(2^{\alpha-1}+1)(2^{\alpha-1}+2)(2^{\alpha-1}+3);$$

am putea avea $n = 3^\alpha$, cu $\alpha \geq 2$, căci

$$3^\alpha \mid 3^{\alpha-1}(3^{\alpha-1}+1)(3^{\alpha-1}+2)(3^{\alpha-1}+3)(3^{\alpha-1}+4).$$

Să observăm şi că $n = 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 \mid 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11$, dar nu divide şi patru consecutive dintre cele din dreapta, deci nu putem, în mod simplist, alege patru dintre cele cinci garantate prin enunţ.

Pentru $n = 2^\alpha$, cu $\alpha \geq 3$, putem lua

$$2^\alpha \mid (2^{\alpha-1}-1)2^{\alpha-1}(2^{\alpha-1}+1)(2^{\alpha-1}+2);$$

pentru $n = 3^\alpha$, cu $\alpha \geq 2$, putem lua

$$3^\alpha \mid 3^{\alpha-1}(3^{\alpha-1}+1)(3^{\alpha-1}+2)(3^{\alpha-1}+3).$$

În toate celelalte cazuri, n are cel puţin doi factori primi distincţi, deci putem utiliza o scriere $n = k\ell$, cu $k, \ell > 1$, c.m.m.d.c.$(k, \ell) = 1$. Putem lua $m \equiv 0 \pmod{k}$, $m \equiv -1 \pmod{\ell}$, din Teorema Chineză a Resturilor; deci $k \mid m$ şi $\ell \mid m + 1$, prin urmare $k\ell = n \mid (m - 1)m(m + 1)(m + 2)$, dar $k \nmid m - 1$, $k \nmid m + 1$, $\ell \nmid m + 2$, $\ell \nmid m$.