

SOLUȚIE

Enunț: Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care satisfac relația

$$f(x) + f([x]) + f(\{x\}) = 2x^2,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(Cu $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului real x , iar cu $\{x\}$ partea fracționară a aceluiași număr.)

Soluție. Pentru $x = 0$ obținem $f(0) = 0$. Pentru $x \in \mathbb{Z}$ obținem $f(x) = x^2$, iar pentru $x \in (0, 1)$ obținem tot $f(x) = x^2$. Acum ipoteza conduce la $f(x) + [x]^2 + \{x\}^2 = ([x] + \{x\})^2$, de unde $f(x) = 2[x]\{x\}$. Se verifică că această funcție corespunde ipotezei. \square