

SOLUȚIE

Problema 2. Se consideră numerele naturale a, b și c astfel încât $7a + 2b = 5c$. Arătați că numărul $M = (a + b)(b + c)(c + a)$ se divide cu 70.

* * *

Soluție: În relația $7a + 2b = 5c$ adunăm în acei doi membrii $5b$ și obținem $7(a + b) = 5(b + c)$.

Din $7 \mid 5(b + c)$ și $7 \nmid 5$ deducem că $7 \mid b + c$ și atunci $7 \mid M$ (1).

Din $5 \mid 7(a + b)$ și $5 \nmid 7$ deducem că $5 \mid a + b$ și atunci $5 \mid M$ (2).

Deoarece $(7, 5) = 1$, din (1) și (2) rezultă $35 \mid M$ (3).

Pe de altă parte, având trei numere naturale, cel puțin două au aceeași paritate, deci suma lor este număr par și atunci $2 \mid M$ (4).

Deoarece $(2, 35) = 1$, din (3) și (4) rezultă $70 \mid M$.