SOLUŢIE

Problema 4

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită cu proprietatea că există $a \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $f(x+a)+f(x-a) = 2f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că funcţia f este periodică.

***

Soluţie. Cum f este mărginită, deducem că există $M > 0$ astfel încât $|f(x)| \leqslant M$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Dacă notăm $\Delta(x) = f(x+a) - f(x)$, egalitatea din enunţ se scrie $\Delta(x) = \Delta(x-a)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Înlocuind x cu $x+a$, obţinem $\Delta(x+a) = \Delta(x)$, iar apoi demonstrăm inductiv că $\Delta(x+ka) = \Delta(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $k \in \mathbb{N}^*$. Rezultă:

$$f(x+ka) - f(x+(k-1)a) = \Delta(x+(k-1)a) = \Delta(x). \qquad (1)$$

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, adunăm membru cu membru egalităţile obţinute din (1) pentru $k = 1, 2, \ldots, n$ şi obţinem

$$f(x+na) - f(x) = n \cdot \Delta(x).$$

Rezultă că $n \cdot |\Delta(x)| = |f(x+na) - f(x)| \leqslant 2M$, pentru orice număr natural nenul n. Deoarece mulţimea numerelor naturale nu este mărginită superior, rezultă $\Delta(x) = 0$, adică $f(x+a) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Aşdar, funcţia f este periodică cu perioada a.