SOLUȚIE

Problema 1.

În planul α, considerăm dreptele distincte a, b şi c, oricare două neparalele. Presupunem că o dreaptă d face unghiuri congruente cu dreptele a, b şi c. Demonstraţi că d este perpendiculară pe planul α.

***

Soluţie.

Dacă $d \| \alpha$ sau $d \subset \alpha$, cum $(\widehat{d,a}) \equiv (\widehat{d,b}) \equiv (\widehat{d,c})$, rezultă că cel puţin două dintre dreptele a, b şi c sunt paralele, contradicţie cu ipoteza.

Fie $d \cap \alpha = \{O\}$ şi $P \neq O$ un punct pe dreapta d. Construim paralele prin O la dreptele a, b şi c, pe care considerăm punctele A, B şi C cu proprietăţile $OA = OB = OC$ şi $\widehat{POA} \equiv \widehat{POB} \equiv \widehat{POC}$.

Avem: $\Delta POA \equiv \Delta POB \equiv \Delta POC$ (cazul L.U.L.) $\Longrightarrow PA = PB = PC$.

Dacă O' este proiecţia lui P pe planul α, avem $\Delta PO'A \equiv \Delta PO'B \equiv \Delta PO'C$ (cazul C.I.), deci $O'A = O'B = O'C$.

Cum centrul cercului circumscris ΔABC este unic, avem $O = O'$, deci $d \perp \alpha$.