Problemă. 2. Fie n număr natural nenul şi S suma tuturor numerelor naturale x astfel încât $(n-1)^2 \leq x < (n+1)^2$.

a) Să se arate că $6 \mid S$.

b) Să se determine n ştiind că $S = 1386$.

Ştefan Smarandache

Soluţie.

a)

$$S = (n-1)^2 + \left[(n-1)^2 + 1\right] + ... + \left[(n-1)^2 + 4n - 1\right]$$

sau

$$S = 4n(n-1)^2 + \frac{4n(4n-1)}{2} = 2n(2n^2+1)$$

Evident S se divide cu 2, mai trebuie arătat că S se divide cu 3.

Dacă $n = 3k$, atunci $S = 6k(18k^2+1)$ şi evident se divide cu 3.

Dacă $n = 3k+1$ sau $n = 3k+2$, atunci $n^2 = M_3 + 1$, de unde $2n^2 + 1 = M_3$, adică S se divide cu 3.

Cum 2 şi 3 sunt prime între ele înseamnă că S se divide cu 6.

b) Trebuie să avem

$$2n(2n^2+1) = 1368$$

sau

$$2n^3 + n - 693 = 0$$

Relaţia de mai sus se scrie

$$(n-7)(2n^2+14n+99) = 0$$

de unde obţinem $n = 7$.
O altă cale de a finaliza: din $2n^3 + n = 693$ rezultă că $n \mid 693$ şi $n^3 < 347$, deci $n \in \{1, 3, 7\}$. Verificând aceste valori găsim că numai $n = 7$ satisface ecuaţia dată.