Etapa 2, Problema 4

Fie ABC un triunghi ascuţitunghic cu $a \leq b \leq c$ şi fie numerele reale u, v, w cu $0 < u \leq v \leq w$. Dacă

$$uGA + vGB + wGC = (u + v + w) R$$

(notaţiile fiind cele uzuale într-un triunghi), demonstraţi că triunghiul ABC este echilateral.

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Recreaţii Matematice 1/2002

Soluţie (**Alexandra Miu**, Craiova şi **Dana Avramescu**, Deva)**.**

Considerăm funcţia

$$f : \mathcal{P} \to \mathbb{R},\ f(M) = u|z_M - z_A| + v|z_M - z_B| + w|z_M - z_C|.$$

Deoarece $z_G = \frac{1}{3}(z_H + 2z_O)$, din inegalitatea modulului obţinem că $f(G) \leq \frac{1}{3} f(H) + \frac{2}{3} f(O)$. Din ipoteză avem că $f(G) = f(O)$ şi deducem că $f(H) \geq f(O)$.

Pe de altă parte, aplicând inegalitatea lui Jensen funcţiei concave $\cos : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0, 1]$, găsim că

$$f(H) = 2R(u \cos A + v \cos B + w \cos C) \leq 2R(u + v + w) \cos \frac{uA + vB + wC}{u + v + w}.$$

Conform inegalităţii lui Cebîşev,

$$uA + vB + wC \geq \frac{1}{3}(u + v + w)(A + B + C),$$

deci $f(H) \leq 2R(u + v + w) \cos \frac{\pi}{3} = f(O)$.

Am obţinut astfel că $f(H) = f(O)$ şi atunci se atinge egalitatea în inegalităţile Jensen şi Cebîşev, prin urmare triunghiul ABC va fi echilateral.

Soluţie alternativă (dată de un grup de elevi de la C.N. "Spiru Haret" din Târgu Jiu)**.**

Ipoteza $a \leq b \leq c$ şi teorema medianei conduc la faptul că $m_a \geq m_b \geq m_c$, deci $GA \geq GB \geq GC$. Folosind inegalitatea lui Cebîşev, obţinem că

$$uGA + vGB + wGC \leq \frac{1}{3}(u + v + w)(GA + GB + GC).$$

Ţinând seama de ipoteza problemei, deducem că $GA + GB + GC \geq 3R$, de unde $m_a + m_b + m_c \geq \frac{9R}{2}$.

Pe de altă parte,

$$m_a + m_b + m_c \leq \sqrt{3\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right)} = \sqrt{\frac{9}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4}\left(9R^2 - OH^2\right)} \leq \frac{9R}{2},$$

cu egalitate doar în cazul triunghiului echilateral. Cum în cazul nostru se atinge egalitatea, urmează concluzia problemei.

Comentarii.

Cu trei excepţii, concurenţii care au rezolvat problema au folosit variaţiuni ale celei de-a doua metode (care, de fapt, este cea naturală).

Andi Brojbeanu, Târgovişte, aplică inegalitatea lui Cebîşev tripletelor invers ordonate (u, v, w) şi $(\cos A, \cos B, \cos C)$ şi arată apoi că se atinge egalitatea în inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.