

Etapa 3, Problema 2

Determinați funcțiile $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ cu proprietatea că

$$7f(n) - 2f(f(n)) = 3n, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Soluție.

Considerăm funcția $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $g(n) = f(n) - 3n$; relația din enunț arată că $g(n) = 2g(f(n))$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Atunci

$$g(n) = 2g(f(n)) = 2^2g(f(f(n))) = \dots = 2^k g(f_k(n)),$$

unde $f_k(n) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_k(n)$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Cum $g(n) \in \mathbb{Z}$, obținem că 2^k divide $g(n)$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$ și $n \in \mathbb{Z}$. Deducem că $g(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ și atunci $f(n) = 3n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.