Problema 3. Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ ştiind că ecuaţia de gradul al doilea

$$x^2 - (a+b)x + a^2 + b^2 - \frac{1}{2} = 0$$

are ambele rădăcini numere întregi.

***

Soluţie. Dacă notăm cu x_1 şi x_2 rădăcinile reale ale ecuaţiei date, din relaţiile lui Vieté obţinem: $\begin{cases} x_1 + x_2 = a + b \\ x_1 x_2 = a^2 + b^2 - \frac{1}{2} \end{cases}$, (1).

Să presupunem că ecuaţia din enunţ admite soluţia $x_i \in \mathbb{Z}$. Rezultă

$$\left(a - \frac{1}{2}x_i\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}x_i\right)^2 + \frac{1}{2}x_i^2 = \frac{1}{2},$$

de unde deducem imediat că $x_i^2 \leq 1$. Obţinem $x_i \in \{-1, 0, 1\}$, (2).

Deoarece $x_1 \in \mathbb{Z}$ şi $x_2 \in \mathbb{Z}$, din relaţia (2) deducem că avem de analizat următoarele şase cazuri:

Cazul 1. $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$. Sistemul (1) devine $\begin{cases} a + b = 0 \\ a^2 + b^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ ab = \frac{1}{2} \end{cases}$,
de unde obţinem $(a, b) \in \left\{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

Cazul 2. $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$. Sistemul (1) devine $\begin{cases} a + b = 2 \\ a^2 + b^2 = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ ab = \frac{5}{4} \end{cases}$,
care nu admite soluţii $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Cazul 3. $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$. Sistemul (1) devine $\begin{cases} a + b = -2 \\ a^2 + b^2 = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -2 \\ ab = \frac{5}{4} \end{cases}$,
care nu admite soluţii $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Cazul 4. $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$. Sistemul (1) devine $\begin{cases} a + b = 0 \\ a^2 + b^2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$, sistem care nu admite soluţii $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Cazul 5. $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$. Sistemul (1) devine $\begin{cases} a + b = 1 \\ a^2 + b^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ ab = \frac{1}{4} \end{cases}$,
de unde obţinem $(a, b) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Cazul 6. $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$. Sistemul (1) devine $\begin{cases} a + b = -1 \\ a^2 + b^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ ab = \frac{1}{4} \end{cases}$,
de unde obţinem $(a, b) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.