Problema 4
Etapa 2 /2023
Clasa a IX-a

Problema 4. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ cu proprietatea:

$$3f(f(x)) - 7f(x) + 2x = 0$$

pentru orice x număr întreg.

Vasile Pop, Cluj - Napoca

Soluţie.
Observăm că funcţia: $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dată de $f(x) = 2x$ pentru orice număr x întreg, este o soluţie pentru ecuaţia funcţională dată. Vom arăta că este singura soluţie.
Facem substituţia: $g(x) = f(x) - 2x$, x număr întreg oarecare. Ecuaţia devine:
$g(x) = 3g(g(x) + 2x)$ sau $g(x) = 3g(f(x))$ pentru orice număr x întreg.
Avem imediat că: $3|g(x)$ implică $3^2|3g(f(x))$ sau $3^2|g(x)$ implică $3^3|3g(f(x))$ echivalent cu $3^3|g(x)$ pentru orice număr x întreg.
Prin inducţie matematică obţinem că $3^n|g(x)$ pentru orice x întreg și orice n natural nenul.
Deducem că $g(x) = 0$, pentru orice x întreg echivalent cu $f(x) = 2x$, pentru orice x număr întreg.
Deci singura soluţie este $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(x) = 2x$.