Problema 1

Numim *secvență binară* de lungime *n* un șir de *n* cifre de 0 sau 1. Pentru o astfel de secvență, A, de lungime finită, $f(A)$ reprezintă o transformare în care fiecare 1 din *A* devine 0,1 și fiecare 0 din *A* devine 1,0. De exemplu, $f\big((1,0,1)\big) = (0,1,1,0,0,1)$. Aflați numărul de perechi de două zerouri consecutive din $f^{(n)}((1))$, unde $f^{(n)}(A)$ este secvența obținută prin transformarea f a lui A de *n* ori.

Soluție.

Fie $A_n = f^{(n)}((1))$ și fie b_n numărul de perechi de două cifre consecutive 0, 0 în A_n, iar c_n numărul de perechi de două cifre consecutive 0, 1 în A_n. Cu condiția dată, observăm că prin transformarea f doar perechea 0, 1 din A_{n-1} poate deveni perechea 0, 0 în A_n și doar numărul 1 sau perechea 0, 0 din A_{n-2} ar putea deveni perechea 0, 1 în A_{n-1}. Din definiția lui f deducem că sunt 2^{n-2} cifre în A_{n-2} și exact jumătate dintre acestea sunt 1, deci

$$b_n = c_{n-1} = 2^{n-3} + b_{n-2}.$$

Obținem $b_n = 2^{n-3} + 2^{n-5} + \ldots + \begin{cases} 2^0 + b_1, & \text{dacă } n \text{ este impar} \\ 2^1 + b_2, & \text{dacă } n \text{ este par} \end{cases}$, unde $b_1 = 0$ și $b_2 = 1$, de unde $b_n = \frac{1}{3}[2^{n-1} + (-1)^n]$.