Problema 4. Determinaţi funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea

$$xf(x+y)+yf(y-x)=f^2(x)+f^2(y)$$

pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

***

Soluţie. Punem $x=y=0$ şi obţinem $f(0)=0$. Pentru $y=0$ obţinem $f(x)(x-f(x))=0, \forall x\in\mathbb{R}$, iar de aici rezultă $f(x)=\begin{cases}0\,, & \text{dacă } x\in A\\ x\,, & \text{dacă } x\in\mathbb{R}\setminus A\end{cases}$, unde $A\subset\mathbb{R}$. Evident $0\in A$. Urmează să determinăm mulţimile A.

Pentru $x=y$ obţinem $yf(2y)=2f^2(y), \forall y\in\mathbb{R}$, iar pentru $x=-y$ obţinem $yf(2y)=f^2(-y)+f^2(y), \forall y\in\mathbb{R}$. Rezultă $f^2(-y)=f^2(y), \forall y\in\mathbb{R}$.

Înlocuind x cu $-x$ în relaţia din enunţ şi folosind relaţia precedentă, obţinem $-xf(y-x)+yf(x+y)=f^2(x)+f^2(y), \forall x,y\in\mathbb{R}$. Multiplicăm această egalitate cu y şi relaţia din enunţ cu x, apoi le adunăm membru cu membru. Obţinem $(x^2+y^2)f(x+y)=(x+y)(f^2(x)+f^2(y)), \forall x,y\in\mathbb{R}, (1)$.

Dacă $A=\{0\}$, rezultă $f(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$ şi această funcţie convine.

Dacă $A\neq\{0\}$, atunci există $a\neq 0$ astfel încât $f(a)=0$. În relaţia (1) punem $y=a-x$ şi obţinem $a\big(f^2(x)+f^2(a-x)\big)=0, \forall x\in\mathbb{R}$. Deoarece $a\neq 0$, rezultă $f^2(x)+f^2(a-x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$, deci $f(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$ şi această funcţie convine.

În concluzie, funcţiile căutate sunt $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$ şi $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_2(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$.