Problema 2. Determinaţi numerele naturale $\overline{abc}$ pentru care

$$\overline{abba} = \overline{aa} \cdot \overline{aca}.$$

Răzvan Ceuca, student, Iaşi

Soluţie: Relaţia dată se mai scrie

$$1001a + 110b = 11a \cdot \overline{aca}$$

sau

$$11(91a + 10b) = 11a \cdot \overline{aca}$$

de unde

$$91a + 10b = a \cdot \overline{aca}$$

sau

$$10b = a \cdot (\overline{aca} - 91) \qquad (1)$$

De aici deducem că

$$10 \mid a \cdot (\overline{aca} - 91).$$

Dacă $(a, 10) = 1$ atunci

$$10 \mid \overline{aca} - 91$$

de unde deducem că $a = 1$.

Înlocuind în (1) găsim $b = c+1$ şi numerele căutate sunt: 110, 121, 132, 143, 154, 165, 176, 187, 198.

Dacă $(a, 10) = 2$ atunci $a \in \{2, 4, 6, 8\}$ şi $5 \mid \overline{aca} - 91$ ceea ce implică $a \in \{1, 6\}$. Aşadar $a = 6$ şi din (1) obţinem $b = 6c + 309$ ceea ce nu este posibil având în vedere că b este cifră.

Dacă $(a, 10) = 5$ atunci $a = 5$, iar din (1) obţinem $2b = \overline{5c5} - 91$ ceea ce este imposibil având în vedere că $2b \leq 18$.