Problema 4 .

Există funcții strict monotone , $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$, cu proprietatea că $f(n)\le\frac{f(n-1)+f(n+1)}{2}, \forall n\in\mathbb{Z}$?

Dar dacă se înlocuieşte sensul inegalității de mai sus cu $'\ge'$?

Soluție problema 4. Autor: **Cristian Vîntur**

Aratam ca nu exista functii strict monotone definite pe Z cu valori in N.

Presupunem prin reducere la absurd ca exista o functie strict monotona definita pe Z cu valori in N.

Pentru aceasta functie $f(0)=a$ este fix. Daca functia este strict crescatoare atunci toate numerele negative trebuie sa ia valori in multimea A=$\{0,1,2,\dots,a-1\}$. Dar ele sunt un infinit, in timp ce multimea A ar un numar finit de elemente (a). Cum functia este strict monotona, fiecarui din cele un infinit de numere negative ii corespunde un alt element din A, deci A ar trebui sa contina un infinit de elemente (contraditie). Analog cand functia este strict descrescatoare.

In concluzie nu exista functii strict monotone definite pe Z cu valori in N.

Rezulta ca raspunsul este negativ in ambele cazuri.