Numerele $1, 2, 3, \ldots, 100$ de pe axa numerelor sunt capetele a 50 de segmente, fiecare din numerele $1, 2, 3, \ldots, 100$ fiind capăt pentru unul din segmente.
Demonstraţi că printre cele 50 de segmente există fie două de lungimi egale, fie două care au suma lungimilor egală cu 100.

Revista Kvant, prelucrare

Soluţie.
Presupunem că ar fi posibil ca printre cele 50 de segmente să nu fie nici segmente de aceeaşi lungime, nici segmente cu suma lungimilor 100. Lungimile posibile de segmente sunt $1, 2, 3, \ldots, 99$. Împărţim segmentele în mulţimi astfel:
A_1 = mulţimea segmentelor de lungime 1 sau 99;
A_2 = mulţimea segmentelor de lungime 2 sau 98;
A_3 = mulţimea segmentelor de lungime 3 sau 97;
....
A_{49} = mulţimea segmentelor de lungime 49 sau 51;
A_{50} = mulţimea segmentelor de lungime 50.
Dacă am avea două din cele 50 de segmente într-o aceeaşi mulţime atunci aceste două segmente ar avea fie aceeaşi lungime, fie suma lungimilor egală cu 100, ceea ce ar contrazice presupunerea făcută la început. Trebuie aşadar să avem exact un segment în fiecare mulţime. Deoarece mulţimile A_1, A_3, A_5, ..., A_{49} conţin segmente de lungime impară, în vreme ce mulţimile A_2, A_4, A_6, ..., A_{50} conţin numai segmente de lungime pară, printre cele 50 de segmente vor fi 25 cu lungima impară şi 25 cu lungimea pară.
Să examinăm acum paritatea capetelor unui segment de lungime pară, respectiv impară. Un segment de lungime pară are capetele de aceeaşi paritate, în vreme ce un segment de lungime impară are capetele de parităţi diferite. Aşadar cele 25 de segmente de lungime impară folosesc 25 de numere pare şi 25 de numere impare, urmând ca celelalte 25 de numere pare şi celelalte 25 de numere impare să fie folosite la segmentele de lungime pară. Dar 25 de numere pare nu pot fi legate folosind numai segmente de lungime pară, deci presupunerea iniţială duce la o contradicţie, prin urmare ea este falsă.